

אומדן פאראמטרים במודלים מורכבים כבעיית אופטימיזציה לא-קווית

ח' טלפו¹

תקציר

אלגוריתם רב-עוצמה לאופטימיזציה לא-קווית, המבוסס על שיטת ה"גרדיינט המופחת" יושם לאמידת פאראמטרים של מודל דינמי מורכב. שיטת "הריבועים הכלליים הפחותים" יושמה באלגוריתם, ובמקביל חושבו מדדים סטטיסטיים של איכות האומדן. לשם הדגמת התיאוריה הנ"ל מוצג מודל של גדילת פטמים המתאר גדילה נורמלית וכן גדילת פיצוי המופיעה לאחר תקופה של הגבלת מזון בגיל צעיר. הגדילה הנורמלית מבוססת בעזרת משוואת גומפרץ. לעומת זה, גדילת הפיצוי מבוססת כנגזרת של משוואת גומפרץ המתוגברת על-ידי מקדם הפיצוי; מקדם זה תלוי בדרגת הגבלת המזון ובגורם הרעבה הדועך עם הזמן בקצב מעריכי. שגיאות התקן של הפאראמטרים שנאמדו היו פחותות מ-3%. סטיות תחזיות המודל מתוצאות התצפיות היו קטנות מ-4%, וברוב המקרים - אף קטנות מ-2%.

מבוא

מטלה חשובה בהקמת מודלים מתמטיים ממוחשבים המתארים מערכות ביולוגיות היא לאמוד את הפאראמטרים של מודלים אלה. כאשר מודלים אלה הם דינמיים הופכת מטלה זו לבעיה קשה ומורכבת. מההבט הסטטיסטי דומה הדבר לבעיית רגרסייה לא-קווית, אלא שפיתרונה נמצא בתחום האופטימיזציה הלא-קווית. ככל שהמודל מכיל יותר משוואות דינמיות סימולטניות כך גובר הקושי לבצע אמידה זו.

למרות שקיימות מערכות תוכנה המסוגלות לאמוד פאראמטרים של מודלים לא-קוויים, יש להן בדרך כלל מגבלות יישום חמורות. למשל, לתוכנת SYSNLIN (8) יש מגבלות גמישות בתיכנות, שאינן מאפשרות לתאר מודלים מורכבים. כמו כן, מפאת שיטת החישוב, שעל אופייה המיוחד נעמוד בהמשך, נכשלת לעיתים השיטה אפילו

מפרסומי מינהל המחקר החקלאי, סדרה ע', 1990, מסי 39.

1 המחלקה לסטטיסטיקה, היחידה לחקר ביצועים, מינהל המחקר החקלאי, מרכז וולקני, בית-א-ה-חור.

במערכות פשוטות באופן יחסי המתארות תהליך דינמי ארוך. לתוכנת GENSTAT (1), למשל, יש מגבלות מבחינת הפאראמטרים שאפשר לאמוד בעזרתה, והיא מציבה קשיים רבים בתיכנות המודלים עצמם.

הופעת תוכנות אופטימיזציה רבות-עוצמה, כמו MINOS (6), המסוגלות לפתור בעיות אופטימיזציה רבות-משתנים באופן יעיל, סללה את הדרך לפתרון הבעיה. טלפז, דה-רוזה והירן (9), למשל, פתרו בעיה כזו באומדם את הפאראמטרים של מודל גידול הכותנה.

תהליך האמידה

את בעיית האמידה אפשר לנסח באופן הזה:

$$\text{Minimize } Z^* = y'y \quad (1)$$

$$\text{Subject to } AX \leq b \quad (2)$$

$$Y_s = F(X, t) \quad (3)$$

כאשר: Z^* הוא סכום ריבועי הסטיות בין תוצאות המודל ובין ערכי התצפיות שנמדדו; Y_s היא מטריצה $T \times m$ של T חישובי הדמיה על-ידי המודל, על יסוד m משתני תוצאה ו/או משתני מצב שחושבו בנקודות הזמן $X_i; t_i (i=1, \dots, T)$ הוא וקטור של n פאראמטרים בלתי-ידועים שאותם יש לאמוד; A היא מטריצה $q \times n$ המכילה את המגבלות הקוויות שיש למלא. מגבלות אלה כוללות תחומי תקפות לפאראמטרים ו/או לשילוב הקווי ביניהם. b הוא וקטור של q רמות למגבלות הקוויות. F מקבל את ערך פונקציית-המטרה המחושבת בהדמיית המודל התלויה בווקטור X , ובזמן t הנמצא בתחום $0 \leq t \leq t_T$; y הוא וקטור של $T \times m$ ערכי הסטיות של המודל (Y_s) מהתצפיות (Y_0) לגבי m המשתנים הנבדקים, כאשר הסטיות של המשתנה הראשון בתחום $0 \leq t \leq t_T$ מופיעות בראש הווקטור, מתחתן הסטיות של המשתנה השני, וכך הלאה. בעזרת האופרטור המסדר מחדש (R_1) אפשר להגדיר זאת כך:

$$y = R_1(Y^s - Y^0) \quad (4)$$

הבאת משוואה מס' 1 למינימום תחת המגבלות מס' 2, 3 ו-4 מגשימה את אומדן הריבועים הפחותים. הקריטריון של הריבועים הפחותים מוצדק על בסיס תיאורטי אם וכאשר הסטיות מהמודל מתפלגות על-פי התפלגות נורמלית, עם ממוצע של 0.0

ושונות σ^2 (ראה ספרות מסי 4, עמי 298-304). ביישום השיטה (ראה עמי 64) נמצאו הסטיות כמתפלגות בהתפלגות נורמלית. אפשר להשיג גמישות חשובה ביותר על-ידי הגשמת סכום ריבועים משוקללים פחותים המוגדר כך:

$$\text{Minimize } Z = y' \Theta^{-1} y \quad (5)$$

תחת המגבלות מסי 2, 3 ו-4, כאשר Θ היא מטריצה אלכסונית $(T_m \times T_m)$ המכילה שיקלולים מהסוג $\Theta_{ij} > 0$ לכל i ו- j . מטריצה כזו משמשת לשינוי קנה-המידה של האומדנים ולנירמולם. אפשר להציב ב- Θ את ערכי השונות וערכי השונות המשותפות, ואז מקבלים סכום ריבועים כלליים פחותים. (פירוט לגבי אפשרויות אחרות ודיון מפורט בנושא, ראה ספרות מסי 9).

התכונות הסטטיסטיות של האומדן

אחד המדדים הבסיסיים הנדרשים להערכת אומדן הפאראמטרים הוא שגיאת התקן של האומדן. הדיון הבא הוא תמצית של ניתוחים מפורטים שאפשר למצוא בספרות (2, 3, 5, 8, 9). הבה נניח שקיימות תצפיות על m משתנים ב- T נקודות זמן. נגדיר את אומדן מטריצת השונות המשותפת של הסטיות (S), על יסוד כל המשתנים כך:

$$S = (Y_s - Y_o)' (Y_s - Y_o) / (T-n) \quad (6)$$

מכאן אפשר להגדיר את מטריצת השונות (Ψ) המשותפת לפאראמטרים באומדן כך:

$$\Psi = [\Gamma, (S^{-1} @ I_T) \Gamma]^{-1} \quad (7)$$

כאשר Γ הוא מטריצה $T_m \times n$ של הנגזרות החלקיות של סטיות המודל מהתצפיות כפונקציה של השינוי בערכי האומדן של כל אחד מהפאראמטרים; $@$ הוא ה-Kronecker multiplication operator I_T ; הוא מטריצה יחידתית בממדי T . מכאן אפשר לחלץ את וקטור שגיאות-התקן המוגדר על-ידי ערכי האלכסון ב- Ω :

$$\Omega = [\text{Diag}(\Psi) / T]^{1/2} \quad (8)$$

כאשר Diag הוא אופרטור המאפס את כל ערכי המטריצה, להוציא את ערכי

האלכסון במטריצה ריבועית ($m \times m$).
את מטריצת המיתאמים (Correlation matrix) בין הפאראמטרים אפשר עתה לחשב כך:

$$\Phi = (T^{1/2}\Omega)^{-1}\Psi(T^{1/2}\Omega)^{-1} \quad (9)$$

את שגיאות-התקן (Ω) אפשר לנצל לצורך בדיקת השערות סטטיסטיות בהנחות מסוימות על התפלגות הסטיות. מטריצת המיתאמים בין הפאראמטרים (Φ) משמשת לבחינת האפשרות לקיומו של קשר קווי בין הפאראמטרים במודל. כאשר המיתאמים גבוהים בערכים המוחלטים, אפשר להקטין את ממדי הבעיה על-ידי השמטת פאראמטרים תלויים, ולעיתים אף לשנות את האינטרפטציה של מבנה המודל.

יישום השיטה

השיטה שתוארה לעיל נכנסת לשימוש בעבודת המחקר של מינהל המחקר החקלאי בעקבות הצלחות ביישומה במקומות אחרים (9). חשוב לדעת שהגישה הנ"ל היא כללית מאוד ולכן היא מאפשרת לאמוד פאראמטרים של מודלים מורכבים מאוד. ההדגמה שתוצג להלן נבחרה מפאת המורכבות הרבה של המודל הביולוגי, שלא כאן המקום להסבירו בהרחבה. נדגים את יישום השיטה לאמידת פונקציית גדילה המיוחדת לפטמים, ונתחיל בסקירת רקע מתומצתת. פרטי העבודה המלאים יובאו במקום אחר.

ידוע שבאפרוחים לפיטוס שעברו בגיל צעיר הגבלת מזון בת ימים מספר מתגלה בסיום ההגבלה קצב גידול מוגבר, או "גדילת פיצוי", לעומת אחיהם שגדלו במשטר הזנה חופשית רציפה. יתרה מזאת, פלבניק והורויץ (7) הראו שבמקביל לגדילת הפיצוי חלה גם ירידה בכמות שומן הבטן והתקבל שיפור חשוב בנצילות המזון. מה שהביא לצורך מיוחד במידול התופעה - משקל הגוף של הפטמים שהזנתם הוגבלה - עלה במידה מובהקת מבחינה סטטיסטית על זה של קבוצת הביקורת, 7-8 שבועות לאחר הפסקת ההרעבה.

פונקציית הגדילה

פונקציית הגדילה לפטמים הנמצאים במשטר הזנה חופשית שייכת למשפחת משוואות גומפרץ (1825), ואומדנה במשטר כזה בוצע על-ידי טלפז ועמיתיו (9) על-פי

נתוני ניסוי שפירסמו פלבניק והורוץ (7). פונקציה זו מובעת כך:

$$W_t = W_F \exp(-\beta e^{-\gamma t}) \quad (10)$$

כאשר: W_t הוא משקל הגוף בזמן t ; W_F הוא פאראמטר שמייצג את משקל הגוף המרבי האופייני לגזע; β הוא פאראמטר חסר ממדים הקובע את קצב הגידול התחילי; γ הוא פאראמטר האחראי לירידת קצב הגדילה עם הזמן, וממדו הוא $1/t$. את שלושת הפאראמטרים יש לאמוד. $\exp(-1 e)$ מסמלים את אותה הפונקציה, כלומר - המספר הטבעי 2.7183 בחזקת (-1) . הגדילה היומית מתקבלת מגזירת משוואה מס' 10 כפונקציה של הזמן t :

$$dW_t/dt = \beta \gamma W_t e^{-\gamma t} \quad (11)$$

מה קורה לפטמים שעברו תקופת הרעבה חלקית? בחינה יסודית של נתוני הניסוי ברמות הרעבה שונות (12) מובילה למסקנות האלה:

1. גדילת הפיצוי אינה זהה בקבוצות ההרעבה השונות;
2. גדילת הפיצוי מושפעת ככל הנראה מרמת ההרעבה באופן לא-קווי: היא עולה ברמות ההרעבה הנמוכות, מגיעה לשיא ברמות הבינוניות ומשם יורדת;
3. בימים הראשונים לאחר תום תקופת ההרעבה מופיעה גדילה מואצת במיוחד, שהיא תוספת לגדילת הפיצוי הרגילה. התופעה נמוגה עם הזמן;
4. לגדילת הפיצוי היומית של קבוצות ההרעבה השונות יש שיא גבוה מזה של קבוצת הביקורת.

תופעת הגדילה המואצת מקבלת ייצוג כללי של הגדילה היומית (G_t) כך:

$$G_t = C(R_t) H(R_t, t) dW_t / dt \quad (12)$$

כאשר מקדם הפיצוי $C(R_t)$ מוגדר כוואריאציה של התפלגות גאמה:

$$C(R_t) = 1 + [(1 - R_t)^{1/2} / \zeta^\mu] \exp(-R_t / \zeta) R_t^{\mu-1} / \mu^2 \quad (13)$$

כאשר: R_t הוא היחס בין משקל הפטם שהוגבל בהזנתו עם סיום הגבלת המזון בזמן t (W_t), ובין משקל הפטם שלא הוגבל כלל באותו פרק-זמן (W_{t_0}), או (W_t / W_{t_0}) ; את הפאראמטרים ζ ו- μ יש לאמוד. פאראמטרים אלה אחראיים לצורת הפונקציה $C(R_t)$.

הפונקציה $H(R_t, t)$ מייצגת את "רעבתנות היתר" של הפטמים לצאת בקצב מוגבר מלחץ הגבלת המזון, ומוגדרת כך:

$$H(R_T, t) = 1 + \eta (1 - R_T)^{1/2} e^{-(t - \tau)} \quad (14)$$

כאשר את מקדם האמפליטודה (η) יש לאמוד. המודל הביולוגי של גידול הפטמים בהזנה חופשית מיוצג על-ידי משוואות מס' 10 ו-11, ואילו זה של הפטמים בהזנה מוגבלת - על-ידי משוואות מס' 12 עד 14. כדאי לציין שפונקציית הפיצוי $C(R_T)$ קבועה לאורך זמן, בעוד שפונקציית "הרעבתנות" $H(R_T, t)$ דועכת עם הזמן, ובעצם נעלמת השפעתה בהדרגה בתוך כשבוע ימים. על מנת לחשב את משקל הגוף יש לבצע אינטגרציה כפונקציה של הזמן. בעוד שבמקרה של ההזנה החופשית האינטגרל של משוואה מס' 11 הוא משוואה מס' 10, הרי שבמקרה של ההזנה המוגבלת קיים קושי לקבל את האינטגרל של המשוואות מס' 12 עד 14. לכן נבחרה שיטת אינטגרציה נומרית המבוססת על שיטת המלבן, עם מירווחי זמן יומיים. למרות שקיימות שיטות מדויקות יותר של אינטגרציה נומרית, היה צורך מיוחד להשתמש בשיטת המלבן מפאת עקיבותה והתאמתה ליישום העיתי במודל שבו יש הכרח להיצמד לשיטה זו מסיבות אחרות לגמרי שלא כאן המקום לפרטן.

האמידה

הנתונים נלקחו מניסויי הגבלת מזון שערכו פלבניק והורויץ (טרם פורסם) במרכז וולקני. ארבע קבוצות אפרוחים בני שבוע מגזע "קוב" הוקצו לטיפול הגבלת מזון שונים, ובין הקבוצות נעשתה השוואה של ממוצעי המשקל והשונות. חזרות הטיפולים מוקמו בשיטת הגושים באקראי באתר הניסוי. לקבוצת הביקורת ניתנה הזנה חופשית ונתוניה שימשו לאומדן הפאראמטרים במשוואה מס' 11. הניסוי נערך בזכרים ובנקבות בנפרד. לשם הדגמה יובאו כאן המימצאים הנוגעים לזכרים בלבד. לארבע קבוצות ההגבלה ניתנה הזנה מוגבלת במשך השבוע השני לחייהם. רמות ההגבלה נקבעו כך שגדילת האפרוחים בשבוע ההגבלה היתה בשיעורים של כ- 5%, 20%, 40% ו-55% בטיפולים A, B, C ו-D בהתאמה, מן הגדילה בקבוצת הביקורת. בתום תקופת ההגבלה קיבלו כל הקבוצות הזנה חופשית עד תום הניסוי, בגיל שמונה שבועות. התוצאות מובאות בטבלה 1. יש לציין שבשתי קבוצות הטיפולים C ו-D הושג לקראת תום הניסוי משקל גבוה משל הביקורת. שאר קבוצות הטיפולים השיגו אמנם גדילת פיצוי, אלא שלא נותר זמן על מנת לגשר על פער המשקלים בגיל שבועיים, שהוכתב על-ידי הגבלות ההזנה החריפות יותר.

טבלה 1: ממוצעי משקל הפטם (גרי) בארבע קבוצות של הגבלת המזון לעומת הביקורת

Table 1: Mean body weight (g) in the four feed restriction groups, as compared with the control

הטיפול Treatment				ביקורת Control (100%)	הגיל (יום) Age (days)	הערות Remarks
D (55%)	C (40%)	B (10%)	A (5%)			
156	156	156	156	156	7	תחילת ההגבלה Begin restriction
169	203	246	285	385	14	סיום ההגבלה End restriction
486	541	608	657	724	21	הזנה חופשית Free feeding
894	967	1050	1098	1140	28	" "
1309	1405	1495	1551	1571	35	" "
1884	1897	2017	2062	2067	42	" "
2402	2456	2582	2650	2633	49	" "
2798	2879	2983	3046	2974	56	" "

בתהליך האמידה מחושב האומד למשקל הגוף (\bar{W}_{jt}) בטיפול j בגיל t, על-פי המודל הביולוגי המתאים. הסטיות בין אומדן המודל ובין תוצאות התצפיות (W_{jt}) חושבו לכל אחת מנקודות הגיל הניתנות בטבלה 1. כל אחת מהסטיות שוקללה בשורש הריבועי של התצפית המתאימה. שיקלול זה מקובל במקרים שבהם קיימת נטייה לעלייה מתונה בשונות, כפונקציה של המשתנה עצמו. מכאן שבתהליך האמידה התקבל:

$$\text{Minimize } Z = \sum_j \sum_t [(\bar{W}_{jt} - W_{jt}) / W_{jt}^{1/2}]^2 \quad (15)$$

תהליך מיזעורו של Z, המוגדר במשוואה מס' 15 ועונה למשוואות 11 עד 14, התבצע כבעיית מינימום לא-קווית בעזרת האלגוריתם MINOS (6). הסיבה לכך היא שהאלגוריתם SYSNLIN (8), שהוא בדרך כלל יעיל ואף נוח יותר למשתמש, נכשל במקרים של מודלים שבהם יש לבצע אינטגרציה נומרית של משוואות דיפרנציאליות למשך זמן ארוך, בגלל בעיות עיגול ודיוק הנובעות מהפעלת כלל השרשרת בגזירה אנאליטית.

התוצאות

האלגוריתם הנ"ל הורץ בשני שלבים. בשלב א' נאמדו הפאראמטרים במשוואה 11 בעזרת נתוני קבוצת הביקורת. בשלב ב' נאמדו יתרת הפאראמטרים במשוואות 13 ו-14. בטבלה 2 מוצגים אומדני הפאראמטרים ושגיאות-התקן במודל הנ"ל.

טבלה 2: אומדן הפאראמטרים ושגיאות התקן במודל

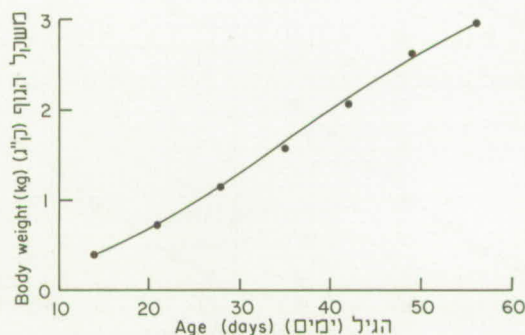
Table 2: The estimated parameters and the standard errors in the model

ערך t מקורב Approx. t value	שגיאת-התקן Standard Error	האומדן Estimate	במשוואה מס' Equation No.	המימד Dimension	הפאראמטר Parameter
42.5	82.0	4843.0	10	גרם g	W_F
49.0	0.095	4.656	11, 10	חסר מימד dimensionless	β
4.8	0.0095	0.0459	11, 10	1/t	γ
84.7	0.02	1.695	13	חסר מימד dimensionless	ζ
51.4	0.005	0.257	13	חסר מימד dimensionless	μ
29.0	0.142	4.123	14	חסר מימד dimensionless	η

מקדמי המיתאם בין הפאראמטרים היו נמוכים מ-0.85 בערכם המוחלט ומתחת לרמה הקוראת בדרך כלל להקטנת מספר הפאראמטרים. במאמר מוסגר כדאי כאן לציין שמשוואות מס' 12 עד 14 הכילו יותר מקדמים בצורתם המקורית, אלא שחישוב מטריצת המיתאמים בין אומדי הפאראמטרים, שכללה מקדמי מיתאם גבוהים (מעל 0.95 בערך מוחלט), הובילה להקטנת מספר הפאראמטרים, ואתם - לשינויים מהותיים בפונקציות עצמן.

בחינת התוצאות שבטבלה 2 מצביעה בעקיפין על טיב האמידה. אפשר להבחין ברמתן הנמוכה באופן יחסי של שגיאות-התקן ביחס לאומדי הפאראמטרים בהתאמה, או בערכי ה- t הסטטיסטי המצביעים על רמת מובהקות גבוהה. באופן

חזותי אפשר לראות זאת גם באיורים 1-2. באיור 1 מוצג משקל הגוף במודל מול נתוני התצפיות.



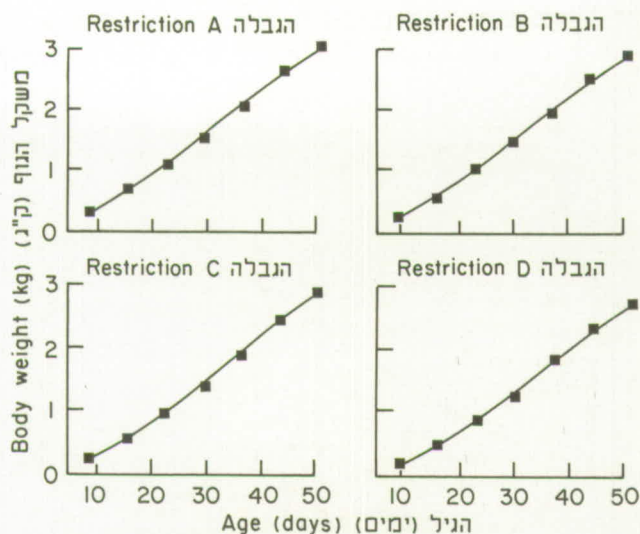
איור 1: משקל הגוף בעופות-זכרים לפיטום שנתקבל בתצפיות (●) לעומת תחזיות המודל (—), לפי משוואה מס' 11

Fig. 1: Body weights of chicken broiler males obtained from observations (●) as compared with model predictions (—) in equation no. 11.

יש לציין שברמת ההתאמה בין התצפיות לתחזיות המוצגת באיור 1 אפשר להעדיף את המודל הנ"ל על קירובים אחרים, פשוטים יותר, כמו למשל קו ישר שהיה אפשר לקבל באמצעותו התאמה סבירה. בעצם הוכח כאן שהמודל שנבחר עדיף (במובהקות סטטיסטית גבוהה) על קו כזה, שאין לו כל תימוכין תיאורטיים. למרות המסקנה הזו כדאי לציין שיתכנו גם מודלים אחרים בעלי רמות התאמה דומות. כמו כן יש לדעת שמבחן המודל ייקבע על-פי מידת התאמתו למסדי נתונים לא-תלויים העונים על תנאי המודל.

באיור 2 מוצגות תחזיות המודל של גדילת הפיצוי (משוואות 12 עד 14) לעומת תוצאות התצפיות, בהתאמה.

גם באיור 2 אפשר לראות התאמה טובה מאוד בין תוצאות התצפיות ובין תחזיות המודל, בכל קבוצות ההגבלה. מרבית הסטיות ביניהן נפלו מ-1% לעומת התצפיות, והסטייה הגדולה ביותר היתה בשיעור של 4.4%. כמו כן שמר המודל על התאמה בין רמות הגבלת המזון ובין רמות המשקל היחסיות, כפי שאלה התבטאו בתוצאות התצפיות. (לדוגמה: אם עקומת המשקל בהגבלה A היתה בתוצאות התצפיות גבוהה מזו של הגבלה B, הרי שכך נשאר הדבר לגבי עקומות המשקל בהגבלות הללו גם בתחזיות המודל).



איור 2: משקל הגוף בעופות זכרים לפיטום, ברמות שונות של הגבלת מזון; התצפיות (■) ותחזיות המודל (—) מתייחסות למשוואות מס' 12 עד 14; ההגבלות A, B, C, D, תואמות את הגבלות המזון המובאות בטבלה 1.

Fig. 2: Body weights of chicken broiler males under feed restriction regimes: observations (■) and model predictions (—) are related to equations no. 12-14. Restrictions A, B, C and D refer to the feed restriction regimes given in Table 1.

דיון וסיכום

הוצגה גישה לאמידת פאראמטרים במודלים לא-קוויים מורכבים. הודגם השימוש בגישה זו במודל דינמי מורכב שלגביו נכשלו שיטות וגישות שהיו מקובלות, כמו למשל SYSNLIN (8). לגישה שהוצגה יש יתרונות מספר וחסרון אחד. היתרון העיקרי הוא שהגישה כללית, ומטפלת במודל הייחודי שאותו יש לאמוד בצורה סטנדרטית זהה. אפשרות זו מיושמת על-ידי טיפול במודל עצמו כבי"קופסה שחורה" לחלוטין. הנגזרות החלקיות הדרושות לאופטימיזציה ולחישוב שגיאת-התקן מחושבות באופן נומרי ולא אנאליטי. מכאן שהמשתמש פטור מהצורך לחשבון, אפילו אם הן קיימות. ובמיוחד מתאפשר יישום השיטה באותם מקרים שבהם קיימים הקשיים שהוזכרו, או שהחישובים האנאליטיים הדרושים אינם ניתנים לביצוע כלל. החסרון הוא בכך שהאלגוריתם אינו מנצל את העובדה שמבקשים למזער פונקציה שהיא ריבועית במהותה (סכום ריבועי הסטיות), עובדה שעשויה להביא להתכנסות מהירה יותר מאשר אלגוריתם המביא למינימום פונקציה לא-קווית כלשהי. בחשבון הכולל יוצאים נשכרים מן השימוש בגישה הזו,

מכיוון שהחסרון שבה מתבטא רק בזמן החישוב; במרבית המקרים זמן זה בטל בששים לעומת היתרון המהותי שמאפשר להרחיב מאוד את תחומי יישום הגישה ומקל ביותר על עצם יישומה.

בפאראמטרים שנאמדו בדוגמה שהוצגה לעיל משתמשים היום במודל לגידול פטמים, והתוצאה היא - יעול ממשק ההזנה בקנה-מידה מסחרי.

רשימת הספרות

1. Alvey, N., Galway, N. and Lane, P. (1982) An Introduction to GENSTAT. Academic Press, New York, NY.
2. Amemiya, T. (1977) The maximum likelihood estimator and the nonlinear three-stage least squares estimator in the general nonlinear simultaneous equation model. *Econometrica* 45: 955-968.
3. Gallant, A.R. and Jorgenson, D.W. (1979) Statistical inference for a system of simultaneous, nonlinear, implicit equations in the context of instrumental variables estimation. *J. Economet.* 11: 275-302.
4. Judge, G.G., Griffiths, W.E., Hill, R.C. and Lee, T.C. (1980) The theory and practice of Econometrics. John Wiley & Sons, New York, NY.
5. Mikhail, W.M. (1975) A comparative Monte Carlo study of the properties of econometric estimators. *J. Amr. Stat. Ass.* 70: 94-104.
6. Murtagh, B.A. and Saunders M.A. (1987) MINOS 5.1 User's Guide. Technical Report SOL 83-20R, Stanford University, Stanford CA.
7. Plavnik, I. and Hurwitz, S. (1985) The performance of broiler chicks during and following a severe feed restriction at an early age. *Poult. Sci.* 64: 348-355.
8. Sall, J.P. (1982) SAS/ETS User's Guide. SAS Institute Inc., Cary, NC.
9. Talpaz, H., da Roza, G.D. and Hearn, A.B. (1987) Parameter estimation and calibration of simulation models as a non-linear optimization problem. *Agric.Syst.* 23: 107-116.
10. Talpaz, H., de la Torre, J.R., Sharpe, P.J.H. and Hurwitz, S. (1986) Dynamic optimization model for feeding of broilers. *Agric. Syst.* 20: 121-132.
11. Talpaz, H., de la Torre, J.R., Sharpe, P.J.H. and Hurwitz, S. (1988) Economic optimization of a growth trajectory for broilers. *Am. J. agric. Econ.* 70: 382-390.